- $V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!}\right) - \left(U_n + \frac{1}{n.n!}\right)$

$$= (U_{n+1} - U_n) + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+1)} - \frac{n+1}{n.}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right) < 0$$

D'où (V_n) est une suite décroissante

2°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n.n} = 0$

$\left(\begin{array}{l} n\,! \geq 1 \Rightarrow n\,.\,n\,! \geq n \\ \lim\limits_{x \to \infty} n = +\infty \text{ alors } \lim\limits_{x \to \infty} n\,.\,n! = +\infty \end{array}\right)$

$\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (V_n - U_n) = 0 \end{cases}$ alors (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacents

Solution 16 :

1°/ $U_{n+1} - U_n = 2^{n+2} \sin \frac{\pi}{2^{n+3}} - 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$$= 2^{n+1}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \sin 2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right]$$

$$= 2^{n+1}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right]$$

$$= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right)$$